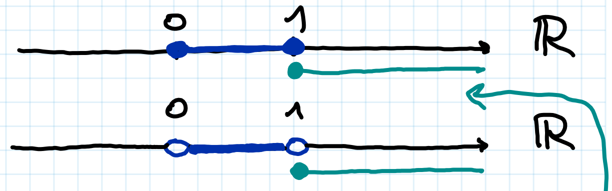
TUTORATO ANALISI I – 18/10/23

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ inf, sup, min, max



- $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$

  $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}$

  $\forall x \in (0,1)$ vale $\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$. L'insieme dei maggioranti di $(0,1)$ e $[0,1]$ è $[1,+\infty)$

<u>Recap</u> $M \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE per $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall y \in A$ vale $y \leq M$.

$\sup(0,1) = \sup[0,1] = 1$ ← è il "più piccolo dei maggioranti"

$\inf(0,1) = \inf[0,1] = 0$ ← è il "più grande dei minoranti"

$(0,1)$ ammette un massimo? NO

$[0,1]$ " " " ? sì: è 1

- $A = (0,1) \cup (3,4) \subset \mathbb{R}$

  $\inf A = 0$, $\sup A = 4$. Ma $0 \notin A$, $4 \notin A$

  $\Longrightarrow$ A NON ammette né max né min.

- $A = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\qquad 0 \in \mathbb{N}$

$$= \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

ogni numero reale negativo o nullo è UN minorante di A
$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei minoranti $\rightsquigarrow$ $\inf A = 0$

$0 \in A \Rightarrow$ A ammette minimo, che è 0 (cioè $\min A = \inf A = 0$).

A ammette un maggiorante? NO. Perché?

Se $y \in \mathbb{R}$ è maggiorante per A, allora $y \geq a$ per ogni $a \in A$.
Sicuramente esiste un numero naturale $n > y$, quindi

$n^2 \geq n > y$, ma $n^2 \in A$ e questo è assurdo!

L'insieme dei maggioranti di A è l'insieme vuoto ($\emptyset$)
$\Rightarrow \sup A = +\infty$ $\qquad$ ($\Rightarrow$ A non ammette massimo).

- $B = \{ \frac{1}{x} \mid x > 0 \}$

$y = \frac{1}{x}$, $x > 0$

B è la semiretta verde (privata dell'origine)

$\inf B = 0$	$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei minoranti di B
$\sup B = +\infty$	$\emptyset$ è l'insieme dei maggioranti di B

B non ammette né max né min.

$\rightsquigarrow \frac{1}{x} \neq 0$

Esercizio $A = \{ a_n = \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e $\min A$, $\max A$ se esistono.

Soluzione

$A = \{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \}$

$0 \in A$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ a_n è il rapporto tra numeri naturali
quindi $a_n \geq 0$
Come prima otteniamo che $\min A = \inf A = 0$.

max e sup : "STRATEGIA" Trovo sup A (che esiste sempre!)

verifico $\sup A$ $\begin{cases} \in A \Rightarrow \max A = \sup A & \text{* ESISTE *} \\ \notin A \Rightarrow \max A \text{ NON ESISTE.} \end{cases}$

- $n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$, quindi

$a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ 1 è un maggiorante di A.

Come provo che effettivamente $\sup A = 1$?

$\sup A$ è "il più piccolo dei maggioranti", cioè
« per ogni numero strettamente minore di $\sup A$ $(\in \mathbb{R})$
esiste un elemento di A che lo supera »

1 è il nostro "candidato" sup A. Verifichiamo che lo è davvero.

$\underbrace{\text{PER OGNI NUMERO} < 1}_{1-\varepsilon}$ $\underbrace{\text{ESISTE UN ELEMENTO DI A}}$ $\underbrace{\text{CHE LO SUPERA}}$

Traduzione matematica: $\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ $\boxed{\exists a \in A}$ $\boxed{\text{t.c. } a > 1 - \varepsilon}$

Un elemento $a \in A$ è un certo $\overset{= \frac{n}{n+1}}{a_n}$, quindi voglio provare che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\quad a_n > 1 - \varepsilon$

Quindi, $\underbrace{\text{fissato } \varepsilon > 0}_{\text{scelto arbitrariamente } \varepsilon>0}$, dobbiamo trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$:

se e solo se (cioè: è equivalente a)

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \underset{n+1>0}{\iff} n > (1-\varepsilon)(n+1) = (1-\varepsilon)n + 1 - \varepsilon$$

$$\iff n - (1-\varepsilon)n > 1 - \varepsilon$$

$$\iff n(1 - 1 + \varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

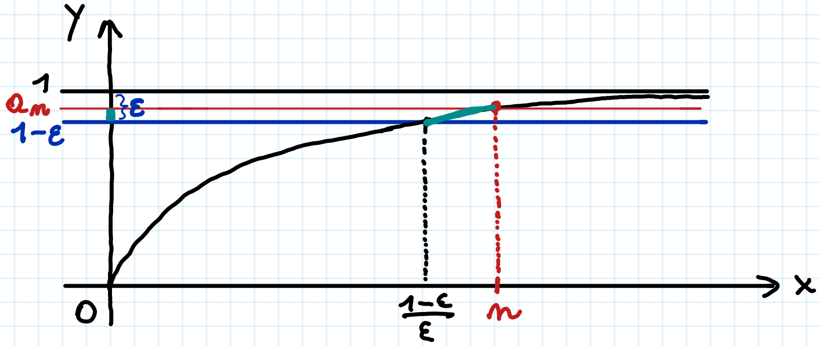
$$\iff n \cdot \varepsilon > 1 - \varepsilon$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\iff} n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

cioè, per avere $a_n > 1 - \varepsilon$

BASTA SCEGLIERE $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

Graficamente:



Esempio pratico $\varepsilon = 0{,}0001$

$1 - \varepsilon = 0{,}9999$

Scegliendo

$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{0{,}9999}{0{,}0001} = 9999$

si ottiene $a_n > 0{,}9999$

ad esempio $n = 10\,000$

Abbiamo quindi dimostrato che $\sup A = 1$.

$1 \in A$? NO $\quad \left(\frac{n}{n+1} = 1 \iff n = n+1 \iff 0 = 1 \right)$

$\Rightarrow$ A non ammette massimo.

ESERCIZIO 5.2, FOGLIO 2

$$A = \{ \overbrace{3^n - 3^{-n}}^{a_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e $\min A$, $\max A$ (se esistono).

Soluzione

$a_n = 3^n - 3^{-n}$. Calcoliamo a_n per qualche valore di $n \in \mathbb{N}$

$a_0 = 1 - 1 = 0$

$a_1 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$a_2 = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9}$

$a_3 = 3^3 - \frac{1}{3^3} = 27 - \frac{1}{27}$

sempre più grande

sempre più piccolo

l'intuito ci dice che

$\sup A = +\infty$

ma anche che

$\inf A = 0 = \min A$

$0 \in A$

DOBBIAMO DIMOSTRARLO!

- $\inf A$.

infatti in tal caso 0 è "il più grande dei minoranti"

Per mostrare che $\inf A = 0$, basta provare che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = 3^n - 3^{-n} \geq 0 \iff 3^n \geq 3^{-n} = \frac{1}{3^n}$$
$$\iff 3^{2n} \geq 1 = 3^0$$
$$\iff 2n \geq 0 \quad \text{VERO} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Quindi $\inf A = \min A = 0$.

- $\sup A$.

Per mostrare che $\sup A = +\infty$, basta provare che:

cioè: non possono esistere dei maggioranti di A

« comunque scelgo $M>0$, trovo $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ »

(in simboli: $\forall M>0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M$)

Fissiamo $M>0$. Vogliamo verificare che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n = 3^n - 3^{-n} > M$

E' una disequazione nella variabile $n \in \mathbb{N}$

$$3^n - 3^{-n} > M \iff 3^n - \frac{1}{3^n} > M$$

$$\iff 3^{2n} - 1 > M \cdot 3^n$$

$$\iff 3^{2n} - M \cdot 3^n - 1 > 0$$

$y = 3^n$

$$\iff y^2 - My - 1 > 0 \qquad \Delta = M^2 + 4 > 0$$

$$\iff y < \frac{M-\sqrt{\Delta}}{2} \vee y > \frac{M+\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\iff 3^n < \frac{M-\sqrt{\Delta}}{2} \vee \underbrace{3^n > \frac{M+\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$3^n > \frac{M+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

$$n > \log_3\left(\frac{M+\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

Quindi scegliendo $n > \log_3\left(\frac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}\right)$, trovo che $a_n > M$.

$\Longrightarrow \sup A = +\infty$ e quindi A non ammette massimo.